De Principio Integrationis Functionum Differentialium, Unius Quantitatis Variabilis, Algebraicæ.

Disquisitio Mathematica,

Quam,

Consent. Ampliss. Ord. Philos. Lundens.

P. P.

P. S. MUNCK AF ROSENSCHÖLD,

Phys. Adj. Ord.

Respondente

JOSUA COLLIANDER,

Smolando.

In Acad. Carol. Die XXIX Nov. MDCCCXLIII.

P. II.

LUNDÆ,

typis Berlingianis,

MDCCCXLIII.

Theses Respondentis.

I.

Argumenta, quæ dicuntur Existentiæ Divinæ, proprie non tunt argumenta; etenim non tam esse Deum, quam qualis sit, plerumque declarant.

II.

Nemo vere liber, nisi vere Christianus.

Ex nuper allatis perspicuum est successum hujus methodi eo niti, quod sit vel Q in æquatione (1), vel terminus ipsi Q respondens in sequentibus æquationibus, ex differentiatione ortis, constans. Hujus quidem simplicissimus est casus quando ipsum Q constans est. Sin autem Q non est constans, modo generali persuasum nobis habere non possumus, differentiatione iterata ad metam pervenire, nisi sit P' constans et Q post numerum differentiationum finitum valorem constantem induat. Terminus enim Q_1 qui in secunda æquatione ipsi Q respondet valorem habet $\frac{Q'}{P'+1}$ et ceteri Q_2 $Q_3 \ldots$ eodem modo ex quantitatibus, quæ in æquatione proxima Q' et P' respondent, compositi sunt. Apparet igitur has expressiones iteratis differentiationibus magis magisque implicari, si P' continet x. Sin autem P' ideoque $P'+1$ est constans, erit quoque P'_1+1 et ceteri termini huic respondentes constantes, et ob hanc causam fiet terminus ad dextram signi æqualitatis necessario constans, si ipsum Q iterata differentiatione constans evadat. Facile apparet, maximi esse momenti quænam functio u eligatur, ex hoc enim pendet num Q vel ceteri termini de quibus quæstio est constantes fieri possint. Formam functionis u pro variis casibus aptissimam determinare studebimus.

Si in æquatione $v+\frac{P}{P'+1}v'=\frac{Q'}{P'+1}$ est $P'+1=0$, h. e. $P=-1$, erunt et $\frac{P}{P'+1}$ et $\frac{Q'}{P'+1}$ infinita. Jam si per $P'+1$ multiplicatur, terminus primus æquationis evanescit et obtinetur $Pv'=Q'$, unde $v'=\frac{Q'}{P}$. Quamquam in hoc casu valor ipsius v' obtinetur, hoc tamen nullam prorsus utilitatem affert, nam v non nisi per integrationem determinari potest. Quoniam $P'=-1$, erit $P=-x+const.$ Hoc evenit si ponitur $u=\frac{1}{x}$,

nam tunc est $u' = -\frac{1}{x^2}$ et $\frac{u}{u'} = -x$. Simili modo erit $P'_1 + 1 = 0$, si ponitur $u = \frac{1}{x^2}$. Nam tunc est $u' = -\frac{2}{x^3}$ et $P = -\frac{x}{2}$. Ergo erit $\frac{P}{P'+1}$ hoc est $P_1 = -\frac{x}{2} \cdot 2 = -x$, ex quo sequitur esse $P_1 + 1 = 0$. Facile apperet $P'_2 + 1$, $P'_3 + 1 \ldots$ per ordinem esse zero, si ponitur $u = \frac{1}{x^3}$ $u = \frac{1}{x^4}$ etc.

Jam ponimus generatim $dy = x^p dx$. Quoniam necessario erit x, vel dignitas ipsius x, factor integralis, sit $u = x^q$, ubi q est exponens indeterminata, quæ cum p nullam prorsus relationem habet. Hinc obtinetur $u' = q\,x^{q-1}$ et $\frac{u}{u'}$ hoc est $P = \frac{x}{q}$. Quoniam $y' = x^p$, erit $\frac{y'}{u'}$ hoc est $Q = \frac{x^p}{q\,x^{q-1}}$, unde æquatio oritur

$$v + \frac{x}{q}\,v' = \frac{x^p}{q\,x^{q-1}}$$

Ut jam sit $\frac{x^p}{q\,x^{q-1}}$ constans, apparet sumendum esse $q - 1 = p$, unde $q = p + 1$. Hoc valore substituto erit $v = \frac{1}{p+1}$ et $u = x^{p+1}$, unde concludimus esse $y = \frac{x^{p+1}}{p+1} + const.$

Jam igitur ad regulam vulgarem integrandi differentiale $x^p dx$ perventi sumus. Modo nuper allato $\int \frac{dx}{x}$ inveniri non potest, tunc enim est $p = -1$, unde $p + 1 = 0$, et $v = \infty$. Quoniam igitur in hoc casu poni non potest

$q - 1 = p$, sit $q = p$, unde æquatio oritur

$$v - x v' = -x$$

in qua est $Q = -x$ atque adeo non constans. Differentiamus igitur æquationem, unde provenit

$$v' - \frac{x}{0} v'' = -\frac{1}{0}$$

Jam igitur est $v' = \infty$ et ob hanc caussam v algebraice exprimi non potest. Hoc etiam cum nuper allato convenit; est enim $u = \frac{1}{x}$ si $q = p = -1$. Ex æquatione tantummodo obtinetur $v'' = \frac{1}{x}$.

Haud majore sussessu poni potest $q = p - 1$ $q = p - 2$ etc. vel $u = \frac{1}{x^2}$, $u = \frac{1}{x^3}$ etc., nam ex antecedente liquet valores respondentes $P'_{,} + 1$, $P'_2 + 1$, esse zero, et v'', v'''.... infinitos.

Si ponimus $q - 1 > p$, quando $p = -1$, erit exponens ipsius x in Q necessario negativa, et functiones Q_1 Q_2...., constantes fieri non possunt. Ex nuper allatis manifestum est $\int \frac{dx}{x}$ terminis finitis algebraicis exprimi non posse.

Ex monomio x^p nos conferimus jam in binomium $a + b x^n$, quod quidem ad potestatem evectum atque per dignitatem quandam ipsius x multiplicatum ponimus, ut sit $dy = x^{m-1} (a + b x^n)^p dx$. Scribimus x^{m-1} loco x^m, quoniam exponens quantitatis variabilis extra uncinos cum unitate aucta in omnibus his disquisitionibus quantitas est maximi momenti, dignaque quæ signum proprium habeat.

Jam liquet, si p est numerus integer positivus, differentiale in summam moniorum finitam per evectionem ad potestatem verti, quorum unum,

quodque per regulam nuper allatam integrari potest, modo non sit x ad potestatem -1 evectum. In sequenti igitur ponimus p inprimis esse numerum positivum fractum, vel negativum, vel etiam irrationalem, cum quidem n et m numeros qualescumque significant. Potest etiam m esse zero.

Ut jam inquirantur conditiones, quibus differentiale $x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$ ex methodo nostra integrari possit, ante omnia hoc erit deliberandum, quænam functio pro u eligatur. Quoniam in casu præcedente, quando de integratione monomii $x^p dx$ quæstio esset, posuimus $u = x^q$, tentemus jam an forma $(a+bx^n)^q$ proposito nostro conveniat. Sit igitur $u = (a+bx^n)^q$, unde deducitur $u' = nqbx^{n-1}(a+bx^n)^{q-1}$. Est autem $y' = x^{m-1}(a+bx^n)^p$, et hinc facile determinantur valores $\frac{u}{u'}$ et $\frac{y'}{u'}$, ex quibus deducitur æquatio:

$$v + \frac{a+bx^n}{nqbx^{n-1}} v' = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{nqbx^n(a+bx^n)^{q-1}}$$

Mox apparet $\frac{y'}{u'}$ h. e. Q admodum simplificari si ponimus $q-1=p$, unde $q=p+1$. Hoc valore in æquatione introducto erit

$$v + \frac{a+bx^n}{n(p+1)bx^{n-1}} v' = \frac{x^m}{n(p+1)bx^n}.$$

Jam erit $\frac{x^m}{n(p+1)bx^n}$ constans, si est $m=n$, et hac conditione expleta obtinetur $v = \frac{1}{n(p+1)b}$ et $uv = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b}$. Hinc concludi potest esse

$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} + C$, ubi C constantem indeterminatam significat. Quoniam $v = \infty$, si $p+1=0$, apparet integrale nuper allatum algebraice exprimi non posse si $p=-1$.